TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

Semestrální práce PAS

Liberec 2010 **Viktor Bubla**

1 Zadání (skupina C)

1.1

Součástky A, B, C jsou zapojeny sériově, tj. při poruše kterékoli z nich dojde k poruše celého systému. Doba do poruchy součástek má exponenciální rozdělení a poruchy na součástkách jsou nezávislé. Střední doby do poruchy jsou pro součástku A 1000 h, pro součástku B 2000 h a pro C 1200 h. Vypočtěte střední dobu do poruchy celého systému. Pro každou součástku stanovte pravděpodobnost, že bude fungovat alespoň 500 h. Najděte distribuční funkci doby do poruchy celého systému a určete pravděpodobnost, že celý systém bude v provozuschopném stavu v čase $t = 200\,h$.

1.2

Firma na těžbu zlata chce porovnat výtěžnost dvou ložisek. U prvního byly naměřeny následující hodnoty na jednotlivých vzorcích: 3,78 8,25 12,05 11,29 11,1 9,5 10,61 11,44. U druhého ložiska byly naměřeny hodnoty: 10,91 15,63 6,24 10,69 13,14 10,41 15,39 13,91 5,83 14,86 9,35 16,01 15,52 11,8. Proveďte exploratorní analýzu pro oba výběry: vytvořte graf empirických distribučních funkcí pro oba výběry, spočítejte: střední hodnotu, rozptyl, šikmost, špičatost. Otestujte shodu rozptylů. Za předpokladu shody rozptylů otestujte na hladině významnosti 0,05 zda jsou střední hodnoty výtěžnosti ložisek stejné.

1.3

Při měření závislosti hustoty vody ρ na její teplotě t byly naměřeny hodnoty (v kg/l):

Tabulka 1:

t [°C]	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
ρ $\left[\frac{kg}{l}\right]$	1,000	1,000	0,997	0,996	0,993	0,987	0,983	0,978	0,973	0,964	0,958

Odhadněte koeficienty kvadratického modelu, spočtěte reziduální rozptyl a testujte hypotézu H_0, že závislost je lineární.

2 Řešení

2.1

Střední doba do poruchy celého systému je

$$E = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{E_i}} = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{2000} + \frac{1}{1200}} = \frac{3000}{7} = 427.57\,h$$

a intenzita přechodu

$$\lambda = \frac{1}{E} = \frac{7}{3000} \doteq 2.33 \cdot 10^{-3}\,h^{-1}$$

Pravděpodobnosti bezproblémové funkce součástek po čase $t_k = 500$ jsou

$$P(t \geq t_k) = e^{-\lambda t_k} = e^{-\frac{t_k}{E}}$$

$$P_A(t \geq 500) = e^{-\frac{500}{1000}} \doteq 0.607 = 60.7\,\%$$

$$P_B(t \geq 500) = e^{-\frac{500}{2000}} \doteq 0.779 = 77.9\,\%$$

$$P_C(t \geq 500) = e^{-\frac{500}{1200}} \doteq 0.659 = 65.9\,\%$$

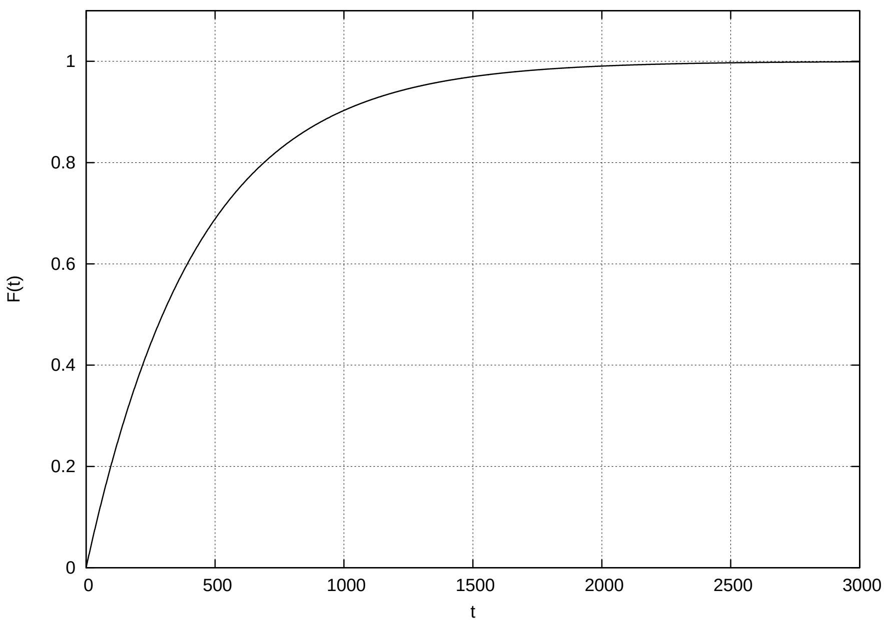
Celý systém bude fungovat v čase $t_k = 200\,h$ s pravděpodobností

$$P(t \geq 200) = P_A(t \geq 200) \cdot P_B(t \geq 200) \cdot P_C(t \geq 200)$$

$$P(t \geq 200) = e^{-\frac{200}{1000}} \cdot e^{-\frac{200}{2000}} \cdot e^{-\frac{200}{1200}} = e^{-\frac{7}{3000} \cdot 200} \doteq 0.627 = 62.7\,\%$$

Distribuční funkce doby do poruchy celého systému je

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{7}{3000} t}$$



Obrázek 1: F(t) do poruchy celého systému.

2.2

Tabulka 2: Seřazené výtěžnosti, absolutní a relativní četnosti, distribuční funkce

Ložisko 1				Ložisko 2			
x_i	n_i	p_i	$F(x_i)$	x_i	n_i	p_i	$F(x_i)$
3,78	1	0,13	0,13	5,83	1	0,07	0,07
8,25	1	0,13	0,25	6,24	1	0,07	0,14
9,5	1	0,13	0,38	9,35	1	0,07	0,21
10,61	1	0,13	0,5	10,41	1	0,07	0,29
11,1	1	0,13	0,63	10,69	1	0,07	0,36
11,29	1	0,13	0,75	10,91	1	0,07	0,43
11,44	1	0,13	0,88	11,8	1	0,07	0,5
12,05	1	0,13	1	13,14	1	0,07	0,57
				13,91	1	0,07	0,64
				14,86	1	0,07	0,71
				15,39	1	0,07	0,79
				15,52	1	0,07	0,86
				15,63	1	0,07	0,93
				16,01	1	0,07	1

Výběrová střední hodnota

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Výběrový rozptyl

$$S^2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2$$

Výběrový koeficient šikmosti

$$G_1 = \frac{M_3}{\sqrt{M_2^3}}$$

a výběrový koeficient špičatosti

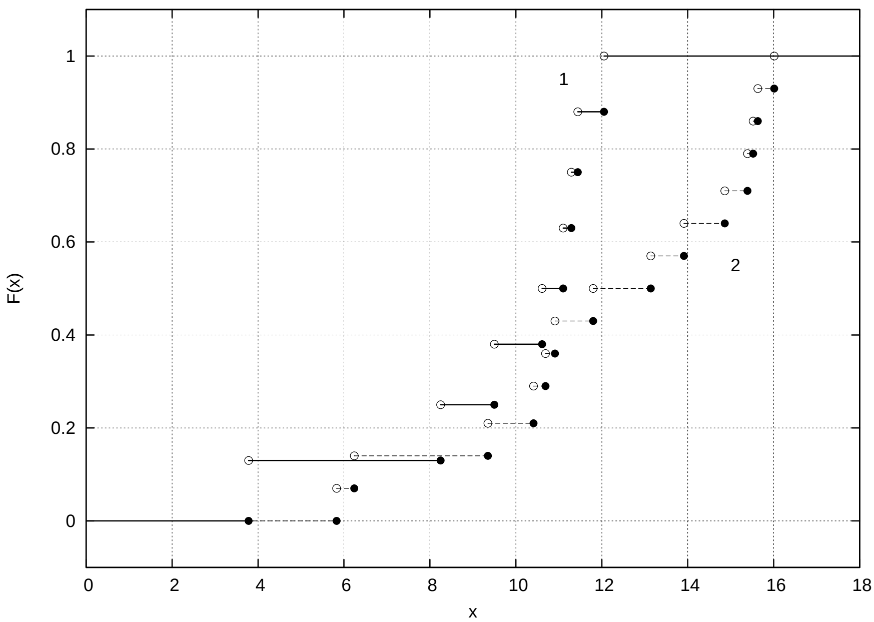
$$G_2 = \frac{M_4}{M_2^2} - 3$$

jsou zjednodušeně zapsány díky vztahu pro k-tý centrální moment

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^k$$

Tabulka 3: Charakteristiky dat

Ložisko 1				Ložisko 2			
$\overline{X}$	S^2	G_3	G_4	$\overline{X}$	S^2	G_3	G_4
9,75	7,29	-1.5	1.06	12,12	11,52	-0.54	-0.8



Obrázek 2: Distribuční funkce výtěžnosti obou ložisek.

Test shody rozptylů

$$H_0: \quad S_1^2 = S_2^2$$
$$H_1: \quad S_1^2 \neq S_2^2$$

$$F = \frac{S_2^2}{S_1^2} = 1.58$$

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) = \frac{1}{F_{1-\frac{0.05}{2}}(7, 13)} = 0.29$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) = F_{1-\frac{\alpha}{2}}(13, 7) = 4.63$$

Nezamítáme tedy, že jsou rozptyly shodné. Můžeme otestovat, zda je výtěžnost obou ložisek stejná

$$H_0: \quad \overline{X_1} = \overline{X_2}$$
$$H_1: \quad \overline{X_1} \neq \overline{X_2}$$

$$T = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}} \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} = -1.69$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2) = t_{0.975}(20) = 2.09$$

$$|T| < t$$

Opět nezamítáme nulovou hypotézu, střední hodnoty výtěžností jsou tedy shodné na hladině významnosti 0.05.

2.3

Tabulka 4: Sumy naměřených dat

$n = \sum_i x_i^0$	$\sum_i x_i^1$	$\sum_i x_i^2$	$\sum_i x_i^3$	$\sum_i x_i^4$	$\sum_i y_i$	$\sum_i y_i x_i$	$\sum_i y_i x_i^2$
$1.1 \cdot 10^1$	$5.5 \cdot 10^2$	$3.85 \cdot 10^4$	$3.03 \cdot 10^6$	$2.53 \cdot 10^8$	$1.08 \cdot 10^1$	$5.73 \cdot 10^2$	$3.74 \cdot 10^4$

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i x_i^2 \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.6597 \cdot 10^{-6} \\ -6.3124 \cdot 10^{-5} \\ 1.0004 \cdot 10^{0} \end{pmatrix}$$

$$\rho = -3.6597 \cdot 10^{-6} t^2 - 6.3124 \cdot 10^{-5} t + 1.0004 \quad [^\circ\mathrm{C}]$$

Reziduální rozptyl je

$$s^2 = \frac{S_e}{n-k} = 8.1305 \cdot 10^{-7}$$

kde k je počet odhadovaných regresních koeficientů a n počet měření a

$$S_e = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(ax_i^2 + bx_i + c\right)\right)^2 = 6.5044 \cdot 10^{-6}$$

je reziduální součet čtverců. Pokud bychom chtěli testovat, zda je závislost pouze lineární, musíme testovat hypotézu

$$H_0 : \qquad a = 0$$
$$H_1 : \qquad a \neq 0$$

$$T = \frac{a}{\sqrt{s^2 \sum_i x_i^4}} = -2.5500 \cdot 10^{-7}$$
$$t_{n-3}(\alpha) = t_8(0.95) = 1.85955 \nleq |T|$$

Hypotézu H_0 zamítáme a tedy závislost zřejmě nemůže být lineární.